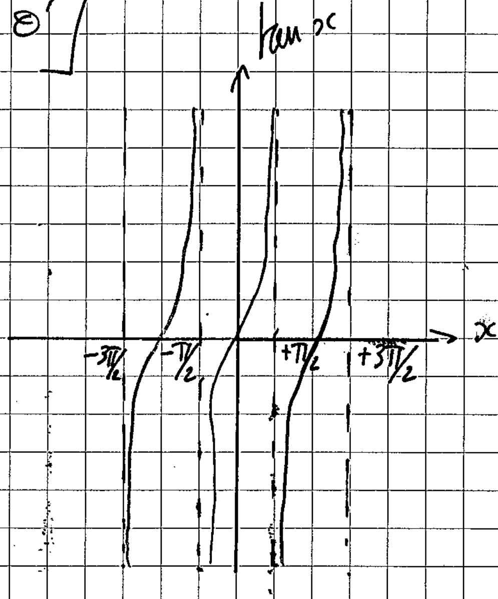
Questions de cours

affixe d'1 point dans le plan complexe $z = a + jb$

$zz' \Rightarrow [\rho\rho' ; \theta + \theta']$

$z/z' \Rightarrow [\rho/\rho' ; \theta - \theta']$

Allure de $\tan(x)$



On calcule $\vec{F} = (qBv_y, -qBv_x, 0)$. Comme $m\vec{a} = (\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt})$, on obtient le système :

$$\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} & = & qBv_y \\ m\frac{dv_y}{dt} & = & -qBv_x \\ m\frac{dv_z}{dt} & = & 0 \end{cases}$$

v_z est donc constante, et de plus en dérivant deux fois v_x on a : $\frac{d^2v_x}{dt^2} = qB\frac{dv_y}{dt} = -(qB/m)^2 v_x$.
Il s'agit d'une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants. Elle admet donc comme solution $v_x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, où $\omega = qB/m$ et A, φ sont des paramètres réels.
On obtient en dérivant $mv_y = -\frac{1}{qB}A\omega\sin(\omega t + \varphi)$, soit $v_y = -A\sin(\omega t + \varphi)$.
Les primitives de v_x, v_y, v_z donnent les coordonnées du vecteur position. Et ce qui précède montre que, selon x et y la particule décrit un cercle (x et y sont respectivement un cosinus et un sinus de même amplitude, même pulsation, même phase), alors que selon z elle a un mouvement rectiligne uniforme : finalement, la particule dans ce champ magnétique décrit une hélice.

1. (a) On a $u_0 - v = Ri$, donc $v + RCv' = u_0$, soit $v' = \frac{-1}{RC}v + \frac{u_0}{RC}$.
   (b) Si u_0 est une constante U_0, on trouve U_0 comme solution particulière de l'équation, et $Ke^{-\frac{t}{RC}}$ pour solution de l'équation sans second membre associée.
   Donc finalement, $v(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + U_0$.

   (c) La dérivée de $\underline{v}(t)$ est $Bj\omega e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega\underline{v}(t)$. Si on remplace dans l'équation trouv cedemment, et que l'on simplifie tout par $e^{j\omega t}$, on trouve : $Bj\omega e^{j\varphi} = \frac{-1}{RC}Be^{j\varphi} + \frac{A}{RC}$

   $$Be^{j\varphi} = \frac{A/RC}{\frac{1}{RC} + j\omega} = \frac{A}{1 + (\omega RC)^2}(1 - j\omega RC).$$

   (d) Ainsi, φ est l'argument du nombre $1 - j\omega RC$. Si $\omega RC = 3$, c'est l'argument de 1 $\sqrt{10}(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3}{\sqrt{10}}j)$, soit $-\arccos(\frac{1}{\sqrt{10}})$.

Quelques décompositions en séries de Fourier

Cette fonction est impaire, les coefficients en cosinus sont nuls. On a par définition :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx.$$

On calcule ce coefficient grâce à une intégration par parties :

$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

On considère l'équation différentielle

$$z''(t) + 2\mu z'(t) + kz(t) = -g \text{ (E)},$$

où g est la constante de gravité.

1. On cherche une solution constante de (E), disons $z(t) = C \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a bien $z''(t) = 0 = z'(t)$ et l'equation (E) devient

$$kC = -g \Leftrightarrow C = \frac{-g}{k}$$

Interprétation physique. Selon l'énoncé, $z = 0$ est la position du poids quand le ressort est non détendu. Lorsque l'on accroche la masse au ressort et on le laisse en *repos*, le ressort sera un peu détendu vers le sol. Donc le poids n'est plus en position $z = 0$, mais plus bas. Cette position (d'équilibre) dépend de la force de la gravité $-g$ et de la constante de raideur k (ici le signe négatif de la constante de gravité et donc de la position C veut dire que la force gravité tire du poids vers le bas)

2. L'équation homogène associée à (E) est donnée par $z''(t) + 2\mu z'(t) + kz(t) = 0$. Les solutions à cette équation sont calculées dans le poly du cours (voir paragraphe 3 du Chapitre 2). Puisque l'on suppose $\mu << k$, la solution est donnée par

$$z_H(t) = \Big(c_1 cos(t\sqrt{k-\mu^2}) + c_2 sin(t\sqrt{k-\mu^2})\Big)e^{-\mu t}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Dans la question (1) ci-dessus on a trouvé la solution particulière constante $z_P(t) = C = \frac{-g}{k}$. Toutes les solutions à l'équation (E) sont alors de la forme

$$z_G(t) = z_p(t) + z_H(t) = \frac{-g}{k} + \Big(c_1 cos(t\sqrt{k-\mu^2}) + c_2 sin(t\sqrt{k-\mu^2})\Big)e^{-\mu t}, \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Note. La dérivée de $z_G(t)$ est donnée par

$$z_G'(t) = \Big((c_2\sqrt{k-\mu^2} - \mu c_1)cos(t\sqrt{k-\mu^2}) - (c_1\sqrt{k-\mu^2} + \mu c_2)sin(t\sqrt{k-\mu^2})\Big)e^{-\mu t}$$

On se donne maintenant les conditions initiales $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$. Dans ce cas, la solution de (E) est unique. Pour la calculer il faut calculer les constantes c_1, c_2 pour que les conditions $z(0) = 0$ et $z'(0) = 0$ soient satisfaites.

$$z(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{-g}{k} + \Big(c_1 cos(0\sqrt{k-\mu^2}) + c_2 sin(0\sqrt{k-\mu^2})\Big)e^{-\mu\, 0} = 0 \Leftrightarrow \frac{-g}{k} + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = \frac{g}{k}$$

$$z'(0) = 0 \Leftrightarrow \Big((c_2\sqrt{k-\mu^2} - \mu c_1)cos(0\sqrt{k-\mu^2}) - (c_1\sqrt{k-\mu^2} + \mu c_2)sin(0\sqrt{k-\mu^2})\Big)e^{-\mu\, 0} = 0 \Leftrightarrow c_2\sqrt{k-\mu^2} - \mu c_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow c_2 = \frac{\mu c_1}{\sqrt{k-\mu^2}} = \frac{\mu g}{k\sqrt{k-\mu^2}}$$

Donc la seule solution $z(t)$ de (E) telle que $z(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ est donné par

$$z(t) = \frac{-g}{k} + \Big(\frac{g}{k} cos(t\sqrt{k-\mu^2}) + \frac{\mu g}{k\sqrt{k-\mu^2}} sin(t\sqrt{k-\mu^2})\Big)e^{-\mu t}$$

Interprétation physique. D'une part, la présence des fonctions cosinus et sinus dans la solution de l'équation (E) indique que la trajectoire du poids est périodique. D'autre part, la présence de la fonction exponentielle $e^{-\mu t}$ comme facteur avec exposant négatif indique que le mouvement du poids s'affaiblit au fil du temps. Plus précisément, on remarque que

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \frac{-g}{k},$$

c'est à dire, le poids tend à se stabiliser à la position initiale lorsqu'il est en repos et accroché au ressort (comparer avec l'intérprétation physique de la question (1)).